MODELISATION D'UN ESSAI AU CYLINDRE CREUX SUR UN SOL ANISOTROPE

HOLLOW CYLINDER TEST MODELING WITH ANISOTROPIC SOIL

Abdelilah ERRAHALI[1], Emmanuel BOURGEOIS[2], Thibault BADINIER[1], Alain LE KOUBY[1]
[1] Université Gustave Eiffel, GERS-SRO, Marne-la-Vallée, France
[2] Université Gustave Eiffel, COSYS-IMSE, Marne-la-Vallée, France

RÉSUMÉ – On propose une modélisation analytique de l'essai au cylindre creux sur un sol à isotropie transverse. Les champs de contraintes, de déformations, et de déplacements sont étudiés pour différentes sollicitations appliquées à l'échantillon. On discute ensuite comment identifier les paramètres du sol avec cet essai.

ABSTRACT – An analytical model of the hollow cylinder test on a transversely isotropic soil is proposed. The stress, strain and displacement fields are studied for different load cases applied to the sample. Then, the identification of the soil parameters with this test is discussed.

1 Introduction

Le comportement des sols dépend de leur histoire, des chargements subis ou de leur processus de formation. De nombreux modèles rhéologiques ont été proposés pour représenter le comportement des sols, mais en pratique, la plupart des modèles utilisés par l'ingénierie sont des modèles élastoplastiques qui font l'hypothèse d'un comportement isotrope. Cependant, dans le cas de la région parisienne, les sols sont formés par sédimentation, et l'hypothèse d'isotropie n'est pas forcément justifiée.

Le creusement des tunnels induit sur les sols environnants des variations de contraintes complexes : le processus de creusement induit une réduction de la contrainte moyenne, une augmentation de la contrainte déviatorique et une rotation des contraintes principales (Berthoz et al., 2010 ; Afshani et Akagi, 2014). Pour ces chemins de chargement complexes, on peut s'attendre à ce que des modèles de comportement isotropes ne représentent pas bien la réalité. En particulier, la largeur de la cuvette de tassement issue de modélisations numériques est souvent plus grande que celle relevée en réalité.

Pour améliorer la prévision des tassements induits en surface par le creusement des tunnels peu profonds, Gilleron (2016) a proposé un modèle dont la partie élastique est isotrope transverse, avec des modules d'élasticité différents dans les directions verticale et horizontale et qui fait jouer un rôle particulier au module de cisaillement G_{vh} entre les directions verticale et horizontale. Des simulations numériques ont montré l'intérêt de cette approche, mais la détermination du module G_{vh} n'est pas accessible au moyen des essais classiques (essai oedométrique, essai triaxial de compression ou d'extension, etc.).

L'essai au cylindre creux a la particularité de tester le sol en compression et en rotation (Reiffsteck et Nasreddine, 2002). Il permet de reproduire des sollicitations plus complexes que des essais classiques, en particulier des contraintes de cisaillement entre les directions horizontale et verticale. Dans un tel essai, l'échantillon de sol prend la forme d'un tube qui est soumis à une pression de confinement, une contre pression intérieure et des déformations combinées de torsion et de compression dans la direction verticale.

On propose une étude analytique détaillée de l'essai au cylindre creux, puis une démarche expérimentale pour l'identification des paramètres du sol. Ensuite, une étude numérique met en évidence l'influence des hypothèses faites sur les conditions aux limites.

2 Etude analytique

Dans cette étude, on adopte la convention de signe de la mécanique des milieux continus dans laquelle les contraintes sont positives en traction et négatives en compression ; les déformations sont positives pour un allongement et négatives pour un raccourcissement.

2.1 Géométrie et Chargement et condition aux limites

On considère un cylindre creux, de rayons interne et externe $\mathrm{R_i}$ et $\mathrm{R_e}$ et de hauteur H . On considère un repère cartésien $(\mathbf{O}, \mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$ dont l'origine O est le centre de la base inférieure du cylindre. On note $(\mathbf{O}, \mathbf{e_r}, \mathbf{e_\theta}, \mathbf{e_z})$ le repère polaire associé et $(\mathrm{r}, \theta, \mathrm{z})$ les coordonnées cylindriques. On néglige le poids de l'échantillon, et on considère les conditions suivantes :

- un moment de torsion $\mathrm{M_t}$ est appliqué à la face supérieure.
- l'échantillon est soumis à une pression de interne $\mathrm{p_i}$ et une pression externe $\mathrm{p_e}$.
- un déplacement vertical $\mathrm{u_0}$ est imposé sur la face supérieure.
- le mouvement vertical et la rotation de la base inférieure du cylindre sont supposés empêchés : $\mathrm{u_z} = \mathrm{u_\theta} = 0$ en $\mathrm{z} = 0$.

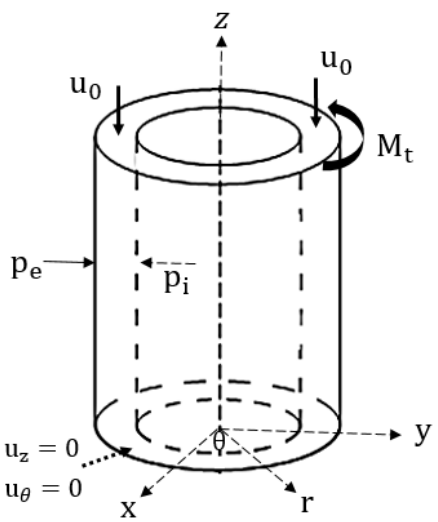

Figure 1: Géométrie et conditions aux limites

2.2 Tenseurs de contrainte et de déformation

On cherche le tenseur des contraintes sous la forme suivante :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta(r) & \tau_{\theta z}(r) \\ 0 & \tau_{\theta z}(r) & \sigma_z(r) \end{bmatrix} \tag{1}$$

On fait les hypothèses suivantes sur les composantes du champ de déplacement :

$$\underline{u} = u_r(r)\, \underline{e}_r + u_\theta(r,z)\, \underline{e}_\theta + u_z(z)\, \underline{e}_z \tag{2}$$

Le tenseur de déformation linéarisé ε est donc donné par :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) & 0 \\ \frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) & \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2}\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial u_\theta}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3)$$

2.3 Equation d'équilibre

En négligeant le poids de l'échantillon, l'équation d'équilibre se traduit, pour un tenseur de contraintes de la forme (1), par :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \;\; ; \; \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = 0 \;\; ; \; \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

2.4 Formulation du comportement

Le comportement élastique linéaire isotrope transverse est caractérisé par 5 coefficients indépendants : le module de Young dans le plan horizontal d'isotropie E_h ; le module de Young dans la direction de symétrie Oz, E_v ; le coefficient de Poisson horizontal ν_h, égal au rapport de la déformation suivant l'axe Ox créée par un incrément de déformation suivant l'axe Oy ou vice versa ; le coefficient de Poisson ν_{vh} , égal au rapport de la déformation suivant l'axe Ox créé par un incrément de déformation suivant l'axe Oz; et le module de cisaillement G_{vh} qui caractérise la relation entre la déformation de cisaillement et la contrainte de cisaillement dans un plan contenant l'axe de symétrie (Haboussa, 2017):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_h & -\nu_h/E_h & -\nu_{vh}/E_v & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_h/E_h & 1/E_h & -\nu_{vh}/E_v & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{vh}/E_v & -\nu_{vh}/E_v & 1/E_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(2G_{vh}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/(2G_{vh}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu_h)/E_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (5)$$

On définit le rapport des modules de Young horizontal et vertical $n = E_h/E_v$. En pratique, il est commode d'exprimer les contraintes en fonction des déformations. Ainsi en inversant la matrice de souplesse, on obtient la matrice de rigidité sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ b & a & c & 0 & 0 & 0 \\ c & c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{vh} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{vh} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_h/(1+\nu_h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Avec :

$$a = \frac{\left(1 - n\nu_{vh}^2\right)}{(1+\nu_h)\left(1-\nu_h-2n\nu_{vh}^2\right)} E_h \; ; \;\; b = \frac{n\nu_{vh}^2 + \nu_h}{(1+\nu_h)\left(1-\nu_h-2n\nu_{vh}^2\right)} E_h \quad (7)$$

$$c = \frac{\nu_{vh}}{\left(1 - \nu_h - 2n\nu_{vh}^2\right)} E_h \qquad ; \quad d = \frac{(1 - \nu_h)}{n\left(1 - \nu_h - 2n\nu_{vh}^2\right)} E_h \tag{8}$$

2.5 Résolution

L'équation (4) donne en utilisant (6) :

$$\frac{\partial[\,(a\varepsilon_r + b\varepsilon_\theta + c\varepsilon_z)\,]}{\partial r} + \frac{(a - b)}{r}\,(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) = 0 \tag{9}$$

Ou encore :

$$a\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{r}\right) + b\left(\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{r}\right) = 0 \tag{10}$$

Il est facile de voir que :

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = r\frac{\partial(u_r/r)}{\partial r} = r\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \tag{11}$$

Et par suite l'équation (10) devient :

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{r} = 0 \tag{12}$$

Ou encore, compte tenu de la forme du tenseur de déformation (3) :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r)\right) = 0 \tag{13}$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$u_r = \frac{A}{r} + Br \tag{14}$$

Où A et B sont des constantes. On note $\varepsilon_0 = \frac{u_0}{H}$, la déformation verticale. La contrainte radiale vaut :

$$\sigma_r = \frac{b - a}{r^2}A + (a + b)B + c\varepsilon_0 \tag{15}$$

On déduit les constantes d'intégration A et B des conditions sur la contrainte radiale à la surface intérieure et extérieure du cylindre $\sigma_r(r = R_e) = -p_e$ et $\sigma_r(r = R_i) = -p_i$:

$$A = -\frac{1 + \nu_h}{E_h}\frac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}(p_e - p_i) \;\; ; \;\; B = -\frac{(1 - \nu_h) - 2n\nu_{vh}^2}{E_h}\frac{R_e^2 p_e - R_i^2 p_i}{R_e^2 - R_i^2} - \nu_{vh}\varepsilon_0 \tag{16}$$

La forme retenue pour le tenseur des contraintes implique :

$$\tau_{r\theta} = 0 \;\rightarrow\; \varepsilon_{r\theta} = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) = 0 \quad (17)$$

Le déplacement orthoradial est donc proportionnel à r. Des équations d'équilibre (4) on déduit que :

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0 \quad (18)$$

u_θ et u_z varient donc linéairement en fonction de z et peuvent être ainsi écrits sous la forme :

$$u_\theta(z, r) = (Cz + D)r \text{ et } u_z(z) = Ez + F \quad (19)$$

où C, D, E, et F sont des constantes. Le mouvement vertical et la rotation de la base du cylindre sont supposés empêchés :

$$\theta_t(z = 0) = 0 \; ; \; u_z(z = 0) = 0 \quad (20)$$

Ce qui donne $D = 0$ et $F = 0$. D'autre part, le déplacement imposé à la face supérieure $u_z(z = H) = u_0$ donne $E = \frac{u_0}{H}$.
La composante orthoradiale du champ de déplacement correspond à une rotation des sections du cylindre autour de l'axe Oz, d'angle : $\theta_t(z) = \frac{u_\theta}{r} = Cz$. L'équilibre des moments à la face supérieure du cylindre s'écrit :

$$\int \tau_{\theta z}(z = H)\, r dS = M_t \quad (21)$$

On rappelle que :

$$\tau_{\theta z} = 2G_{vh}\varepsilon_{\theta z} = G_{vh}\frac{\partial u_\theta}{\partial z} = G_{vh}Cr \quad (22)$$

En reportant dans (21), on trouve $C = \frac{M_t}{G_{vh}\, I_G}$, où $I_G = \int r^2\, dS = \pi\frac{R_e^4 - R_i^4}{2}$ est le moment polaire de la section du cylindre creux.

On résume ci-dessous les résultats trouvés.

- Les contraintes sont données par :

$$\sigma_r(r) = -\frac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\left[\left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{r^2}\right)p_e - \left(\frac{1}{R_e^2} - \frac{1}{r^2}\right)p_i\right] \quad (23)$$

$$\sigma_\theta(r) = -\frac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\left[\left(\frac{1}{R_i^2} + \frac{1}{r^2}\right)p_e - \left(\frac{1}{R_e^2} + \frac{1}{r^2}\right)p_i\right] \quad (24)$$

$$\sigma_z = -2\nu_{vh}\frac{R_e^2 p_e - R_i^2 p_i}{R_e^2 - R_i^2} + E_v\varepsilon_0 \quad (25)$$

$$\tau_{\theta z}(r) = \frac{M_t}{I_G} r \quad (26)$$

- Le champ de déformation est donné par :

$$\varepsilon = \varepsilon(p_e, p_i) + \varepsilon(u_0) + \varepsilon(M_t) \quad (27)$$

Avec :

$$\varepsilon(p_e, p_i) = -\frac{(1-\nu_h) - 2n\nu_{vh}^2}{E_h}\frac{R_e^2 p_e - R_i^2 p_i}{R_e^2 - R_i^2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \frac{1+\nu_h}{E_h}\frac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}(p_e - p_i)\frac{1}{r^2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\varepsilon(u_0) = \frac{u_0}{H}\begin{bmatrix}-\nu_{vh} & 0 & 0\\ 0 & -\nu_{vh} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\varepsilon(M_t) = \frac{M_t}{2G_{vh}I_G} r\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad (30)$$

- Le champ de déplacement est donné par :

$$u_r = -\frac{1+\nu_h}{E_h}\frac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}(p_e - p_i)\frac{1}{r} - \left(\frac{(1-\nu_h) - 2n\nu_{vh}^2}{E_h}\frac{R_e^2 p_e - R_i^2 p_i}{R_e^2 - R_i^2} + \nu_{vh}\frac{u_0}{H}\right) r \quad (31)$$

$$u_\theta = \frac{M_t}{G_{vh}I_G} zr \quad (32)$$

$$u_z = u_0\frac{z}{H} \quad (33)$$

- La rotation de la section supérieure par rapport à la section inférieure :

$$\theta_t = \frac{M_t}{G_{vh}I_G} H \quad (34)$$

3 Identification des paramètres du sol à partir de l'essai au cylindre creux

Pour un essai de cisaillement consolidé drainé avec une pression de confinement $p_i = p_e$ maintenue constante. Le module de Young vertical E_v et le coefficient de Poisson ν_{vh} peuvent être déterminés à partir de la mesure de la contrainte déviatorique q et la variation volumique ε_v durant la phase de cisaillement de la manière suivante :

$$q = E_v\varepsilon_z \quad ; \quad \varepsilon_v = (1 - 2\nu_{vh})\varepsilon_z \quad (35)$$

On peut déterminer le module G_{vh} à partir de la mesure de l'angle de rotation de la face supérieure du cylindre sous l'effet du moment de torsion M_t :

$$G_{vh} = \frac{M_t}{\theta_t}\frac{H}{I_G} \tag{36}$$

Il reste à discuter la détermination de E_h et ν_h. Considérons le cas où $u_0 = 0$ et $M_t = 0$. Le déplacement radial sur la face extérieure (avec $\Delta p = p_e - p_i$) vaut :

$$\frac{u_r(R_e)}{R_e} = \left(-\frac{1+\nu_h}{E_h}\frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} - \left(\frac{1-\nu_h}{E_h} - \frac{2\nu_{vh}^2}{E_v}\right)\frac{1}{1-(R_i/R_e)^2}\right)\Delta p - \left(\frac{1-\nu_h}{E_h} - \frac{2\nu_{vh}^2}{E_v}\right)p_i \tag{37}$$

Ainsi, en réalisant deux chemins de contraintes, un en prenant les pressions de confinement identiques et un faisant varier leur écart Δp, on peut mesurer, en principe, respectivement les deux quantité $\frac{1-\nu_h}{E_h}$ et $\frac{1+\nu_h}{E_h}$ et en déduire les valeurs de ν_h et E_h. Si l'appareil ne permet pas de faire varier l'écart Δp, des essais triaxiaux classiques permettront d'accéder à ces deux paramètres.

4 Modélisation numérique sur CESAR-LCPC de l'essai au cylindre creux

L'étude analytique présentée ici repose sur une hypothèse forte : pour simplifier la résolution, on a considéré que le déplacement radial est libre sur les faces supérieure et inférieure. Ce type de conditions aux limites est difficile à réaliser au laboratoire. On propose d'évaluer l'influence de cette hypothèse sur les résultats obtenus à l'aide de la modélisation numérique, en utilisant le logiciel CESAR-LCPC développé par l'Université Gustave Eiffel. On considère un échantillon de sol sous forme d'un cylindre, de rayon intérieur $R_i = 8$ cm , et extérieur $R_e = 10$ cm. La hauteur de l'échantillon est prise comme paramètre. Les différentes données de la simulation sont résumées dans le tableau 1.

Tableau 1. Données de la simulation numérique

E_v (MPa)	E_h (MPa)	ν_{vh}	ν_h	G_h(MPa)	G_{vh}(MPa)	p_e(kPa)	p_i (kPa)	u_0 (mm)	θ_t (°)
20	10	0.25	0.25	4	3	300	200	-5	5

Pour quatre valeurs du rapport H/D_e de la hauteur de l'échantillon à son diamètre (0,5 ; 1 ; 1,5 et 2), on compare le déplacement radial u_A obtenu par la formule analytique obtenue dans la partie précédente (qui correspond à un déplacement radial libre sur les faces horizontales de l'échantillon), avec le déplacement u_N calculé numériquement avec CESAR en bloquant le déplacement radial en haut et en bas. Les résultats obtenus sont résumés dans la figure 2 .L'effet des conditions aux limites est significatif pour un échantillon peu élancé ($H/D_e \leq 1$), mais la différence relative sur le déplacement radial à mi-hauteur est inférieure à 1% pour $H/D_e = 2$.

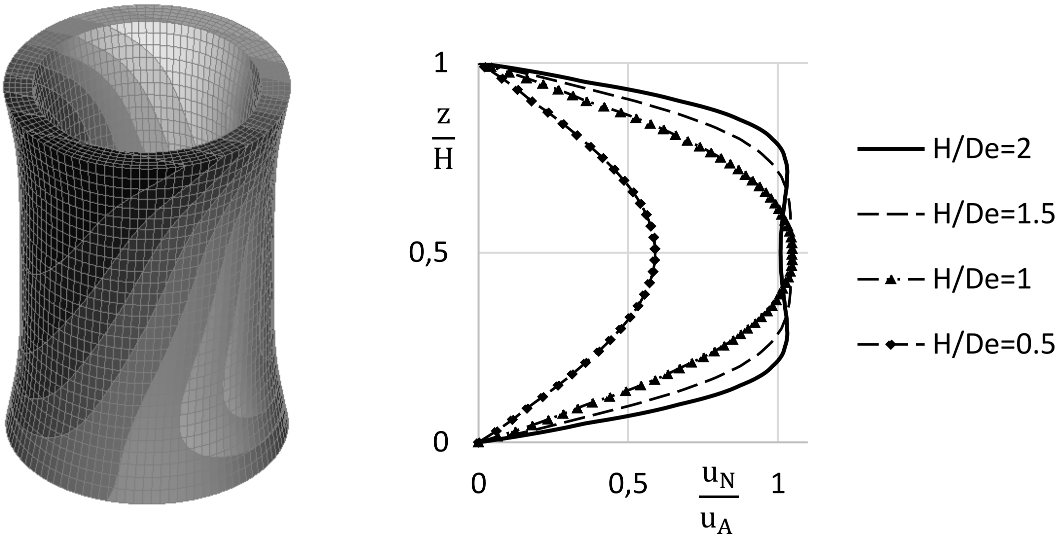

Figure 2 : Vue du maillage 3D (Gauche) Résultats de la simulation numérique (Droite)

5 Conclusions et perspectives

La première conclusion de cette étude est que l'essai au cylindre creux permet, en principe, d'identifier l'ensemble des paramètres élastiques d'un sol à isotropie transverse notamment le module de cisaillement vertical G_{vh} qui est difficile à déterminer par les essais classiques. La simulation numérique a permis de valider les résultats analytiques d'une part, et d'estimer un élancement minimal des éprouvettes permettant de minimiser l'influence des conditions aux limites. Dans de futurs développements, une campagne d'essais au cylindre creux sur des sols naturels devrait permettre de discuter de manière plus détaillée la détermination des paramètres de modèles isotropes transverses pour des matériaux réels. D'autres aspects plus complexes seront étudiés à l'aide de l'essai au cylindre creux. On cherchera notamment à étudier la contribution de cet essai à la formulation d'une loi de comportement élasto-plastique avancée et plus complète, prenant en compte particulièrement, l'effet de l'anisotropie du sol et du phénomène de rotation des axes principaux de contraintes observé lors de creusement des tunnels. Cette démarche vise à améliorer la modélisation de l'effet de creusement des tunnels peu profonds sur les ouvrages avoisinants notamment les fondations profondes.

6 Références

Université Gustave Eiffel (2020) « CESAR - Modèles de comportement mécanique ».

Haboussa, D. (2017) « élasticité anisotrope », documentation de référence de Code_Aster, fascicule r4.01.02.

Afshani, A., & Akagi, H. (2014). Stress-path and piezometric head field analysis of soil during earth pressure balanced shield tunneling, Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Ground, 295-302.

Berthoz, N., Branque, D., Wong, H., & Subrin, D. (2010). Evolution des champs de contraintes et déplacements autour d'un tunnelier à front pressurisé. JNGG2010, Grenoble, France, 779-786.

Gilleron, N. (2016). Méthode de prévision des tassements provoqués par le creusement des tunnels urbains et influence des présoutènements (Thèse de Doctorat, Paris Est).

Reiffsteck, P., & Nasreddine, K. (2002). Cylindre creux et détermination de paramètres de lois de comportement des sols. Symposium international PARAM 2002, Paris, 2-3 septembre 2002.